УДК 62-50

Н. Ю. Лукоянов

О СТАБИЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ НАСЛЕДСТВЕННЫМИ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ*

1. Введение

Согласно теоретико-игровому подходу [1–3] основным элементом в решении многих задач управления движением динамических систем в условиях неконтролируемых помех или конфликта является построение в пространстве возможных позиций системы специальных множеств, которые называют стабильными мостами. Методом экстремального сдвига на стабильный мост (см. [2]) строится позиционная стратегия, которая, формируя управление по принципу обратной связи, обеспечивает движение системы вблизи этого моста и тем самым гарантирует прогнозируемое качество процесса управления. Если целью управления является оптимизация некоторого заданного показателя качества, рассматривают также стабильные функции. Множества уровня этих функций являются стабильными мостами. По стабильной функции строятся экстремальные стратегии (см. [3]), которые гарантируют показателю качества величину, не худшую, чем значение этой функции, посчитанное в начальной позиции.

Стабильные мосты и стабильные функции исследовались во многих работах по теории дифференциальных игр. В основном – для управляемых систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В частности, поскольку для достижения приемлемого (и тем более оптимального) качества управления требуется рассматривать мосты с негладкой границей и соответственно негладкие стабильные функции, развивались конструкции негладкого анализа. Была предложена унификация дифференциальных игр [4], получены неравенства для производных стабильных функций по направлениям [5], неравенства для сопряженных к ним производных [6], дано описание стабильных мостов в терминах конусов касательных направлений и производных многозначных отображений [7], изучены свойства суб- и суперградиентов стабильных функций [8].

*Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00436).

Разработанный в теории дифференциальных игр аппарат стабильных функций составил основу для построения теории минимаксных решений уравнений типа Гамильтона–Якоби [8] и более общих УЧП первого порядка [9]. При этом исследования инфинитезимальных свойств стабильных функций выявили связь минимаксного и вязкостного [10] подходов к обобщенному решению УЧП. Для широкого круга задач была установлена эквивалентность понятий вязкостного и минимаксного решений (см. [8, 9]).

В настоящей статье рассматривается задача управления движением наследственной динамической системы. Такие системы описываются дифференциальными уравнениями с последействием. Уравнения с последействием обладают рядом существенных особенностей, в силу которых к ним неприменимы напрямую результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений. С другой стороны, при должном осмыслении поведение наследственных систем можно характеризовать на основе подходов, методов и конструкций, во многом аналогичных наработанным в теории обыкновенных дифференциальных систем. Так, согласно подходу, предложенному в [11] и развитому для задач конфликтного управления в [12, 13], эволюцию наследственных систем рассматривают в функциональном пространстве историй движения. Тогда естественным аналогом стабильных функций для таких систем являются функционалы истории движения. Ниже обсуждаются различные по форме, но эквивалентные по сути способы описания стабильных функционалов, которые взаимно дополняют друг друга. Рассматриваются минимаксный и вязкостный подходы.

Статья продолжает работы автора [15–17] по исследованию обобщенных решений функциональных уравнений типа Гамильтона–Якоби и их приложений к решению задач управления с наследственной информацией.

2. Основные предположения и обозначения

Движение динамической системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}[t] = f\big(t, x[t_*[\cdot]t], u[t], v[t]\big), \quad t_* \le t_0 \le t \le T, \tag{1}$$

$$x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in P \subset R^k, \quad v[t] \in Q \subset \mathbb{R}^m,$$

с начальным условием

$$x[t_*[\cdot]t_0] = x_0[t_*[\cdot]t_0] \in C\big([t_*, t_0], \mathbb{R}^n\big). \tag{2}$$

Здесь t – переменная времени; $x[t]$ и $\dot{x}[t] = dx[t]/dt$ – значение фазового вектора и скорость его изменения в текущий момент t; $x[t_*[\cdot]t] = \{x[\tau], t_* \le \tau \le t\}$ –

текущая история движения; $u[t]$ – текущее воздействие управления; $v[t]$ – воздействие неконтролируемой помехи; P и Q – компакты; t_* и T – фиксированы; t_0 – момент начала процесса управления; $x_0[t_*[\cdot]t_0]$ – начальная история; $C\big([t_*,t_0],\mathbb{R}^n\big)$ – пространство непрерывных n-мерных функций, определенных на отрезке $[t_*,t_0]$.

Допустимы измеримые реализации управления $u[\cdot]:[t_0,T)\mapsto P$ и помехи $v[\cdot]:[t_0,T)\mapsto Q$. Движение системы (1), (2) – функция $x[\cdot]\in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)$, совпадающая с $x_0[t_*[\cdot]t_0]$ на $[t_*,t_0]$, абсолютно непрерывная на $[t_0,T]$ и при почти всех $t\in[t_0,T]$ удовлетворяющая уравнению (1). При этом история $x[t_*[\cdot]t]$ – сужение этой функции на $[t_*,t]$.

Тройка $\{x[\cdot],u[\cdot],v[\cdot]\}$ символизирует реализацию процесса управления. Качество этой реализации оценивается показателем

$$\gamma=\gamma\Big(\big\{x[\cdot],u[\cdot],v[\cdot]\big\}\Big)=\sigma\big(x[\cdot]\big)-\int_{t_0}^{T}h\big(t,x[t_*[\cdot]t],u[t],v[t]\big)\,dt. \tag{3}$$

Цель управления – доставить показателю (3) как можно меньшее значение. Действия помехи непредсказуемы и могут быть самыми неблагоприятными.

Отображения $f=f\big(t,x[t_*[\cdot]t],u,v\big)\in\mathbb{R}^n$ и $h=h\big(t,x[t_*[\cdot]t],u,v\big)\in\mathbb{R}$ определены и непрерывны при $t\in[t_*,T]$, $x[t_*[\cdot]t]\in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$, $u\in P$ и $v\in Q$.

Замечание 1. Говоря о непрерывности какой-либо величины $a\big(t,x[t_*[\cdot]t],w\big)$ по переменным $t\in[t_*,T]$, $x[t_*[\cdot]t]\in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$ и $w\in W\subset\mathbb{R}^r$, полагаем, что эта величина, во-первых, непрерывна по совокупности переменных $\big(x[t_*[\cdot]t],w\big)$ при любом фиксированном значении t, и во-вторых, для любой фиксированной функции $x[\cdot]\in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)$ непрерывна по совокупности переменных (t,w), причем для любого компакта $D\subset C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)$ равностепенно относительно $x[\cdot]\in D$.

Имеет место оценка

$$\big\|f\big(t,x[t_*[\cdot]t],u,v\big)\big\|^2+h^2\big(t,x[t_*[\cdot]t],u,v\big)\le L^2\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big), \tag{4}$$

где

$$L\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)=\Big(1+\max_{t_*\le\tau\le t}\|x[\tau]\|\Big)c,\quad c=\text{const}>0.$$

Гамильтонианом системы (1)–(3) называем величину

$$H\big(t,x[t_*[\cdot]t],s\big)=\min_{u\in P}\max_{v\in Q}\Big[\big\langle s,f(t,x[t_*[\cdot]t],u,v)\big\rangle-h(t,x[t_*[\cdot]t],u,v)\Big], \tag{5}$$

где $s\in\mathbb{R}^n$. В (4), (5) и всюду далее символ $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – скалярное произведение векторов.

Функционал $\sigma\colon C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)\mapsto\mathbb{R}$ считаем непрерывным. Символом $\mathrm{Lip}\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$ обозначаем множество функций $y[\cdot]\in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big)$, каждая из которых совпадает с $x[t_*[\cdot]t]$ на $[t_*,t]$ и является липшицевой на $[t,T]$. Символом $\mathrm{Lip}_K\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$, где $K>0$, обозначаем множество таких функций $y[\cdot]\in\mathrm{Lip}\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$, которые на $[t,T]$ удовлетворяют условию Липшица с константой K.

3. Стабильные функционалы

Рассмотрим функционал $\varphi=\varphi\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$, $t\in[t_*,T]$, $x[t_*[\cdot]t]\in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$. Полагаем, что он непрерывен и удовлетворяет условию

$$\varphi\big(T,x[t_*[\cdot]T]\big)\ge\sigma\big(x[\cdot]\big),\quad x[t_*[\cdot]T]=x[\cdot]\in C\big([t_*,T],\mathbb{R}^n\big). \tag{6}$$

Следуя [2, 3, 12, 13] функционал φ называем *стабильным* (u-стабильным – в терминологии [2,3]) относительно системы (1)–(3), если для любых $t\in[t_*,T)$, $x[t_*[\cdot]t]\in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$, $\tau^*\in(t,T]$ и $v\in Q$ дифференциальное включение с последействием

$$\big(\dot y[\tau],\dot z[\tau]\big)\in\mathrm{co}\Big\{\big(f(t,y[t_*[\cdot]\tau],u,v),h(t,y[t_*[\cdot]\tau],u,v)\big)\,\big|u\in P\Big\}$$

имеет решение, которое удовлетворяет начальному условию

$$y[t_*[\cdot]t]=x[t_*[\cdot]t],\quad z[t]=\varphi\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$$

и неравенству

$$z[\tau^*]\ge\varphi\big(\tau^*,y[t_*[\cdot]\tau^*]\big).$$

Здесь символ co означает выпуклую оболочку множества в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Стабильные функционалы замечательны тем (см. [2,12,13]), что, управляя системой (1), (2) на основе экстремального сдвига по такому функционалу φ, можно с наперед заданной точностью $\varepsilon>0$ обеспечить неравенство

$$\gamma\le\varphi\big(t_0,x_0[t_*[\cdot]t_0]\big)+\varepsilon, \tag{7}$$

какова бы ни была допустимая реализация помехи $v[\cdot]$.

Используя конструкции унификации [4], стабильность функционала φ можно выразить в терминах гамильтониана системы (1)–(3).

Условие 1. *Для любых $t\in[t_*,T)$, $x[t_*[\cdot]t]\in C\big([t_*,t],\mathbb{R}^n\big)$ и $s\in\mathbb{R}^n$ найдется $y[\cdot]\in\mathrm{Lip}\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)$, удовлетворяющая следующим соотношениям:*

$$\big\|\dot y[\tau]\big\|\le L\big(\tau,y[t_*[\cdot]\tau]\big)\quad\text{п. в.}\quad\tau\in[t,T],$$

$$\varphi\big(\tau,y[t_*[\cdot]\tau]\big)-\varphi\big(t,x[t_*[\cdot]t]\big)\le\int_t^\tau\big\langle\dot y[\xi],s\big\rangle-H\big(\xi,y[t_*[\cdot]\xi],s\big)\,d\xi,\quad\tau\in[t,T].$$

Согласно [16] стабильные функционалы φ удовлетворяют условию 1. С другой стороны, по непрерывному функционалу φ, удовлетворяющему (6) и условию 1, можно построить [17] стратегию управления, обеспечивающую неравенство (7). Таким образом, опираясь на условие 1, можно говорить о функционалах φ, стабильных относительно класса систем (1)–(3) с одним и тем же гамильтонианом H.

4. Стабильность коинвариантно гладких функционалов

Функционал φ называем *коинвариантно* (ci-) *гладким* [14–17], если для любых $t \in [t_*, T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*, t], \mathbb{R}^n\big)$ и $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$ имеет место равенство

$$\varphi\big(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]\big) - \varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) = \partial_t\varphi\,\delta + \big\langle \nabla\varphi,\, y[t+\delta] - x[t]\big\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta),$$
$$\delta \in (0, T-t],$$

где величины $\partial_t\varphi = \partial_t\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) \in R$ и $\nabla\varphi = \nabla\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) \in \mathbb{R}^n$, называемые соответственно ci-производной функционала φ по t и его ci-градиентом, не зависят от выбора $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$ и непрерывны, бесконечно малая $o_{y[\cdot]}(\delta)$ зависит от выбора $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$, $o_{y[\cdot]}(\delta)/\delta \to 0$ при $\delta \to 0$.

В [16] показано, что для ci-гладких функционалов условие 1 эквивалентно дифференциальному неравенству

$$\partial_t\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) + H\Big(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\Big) \leq 0, \tag{8}$$

которое должно выполняться для всех $t \in [t_*, T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C\big([t_*, t], \mathbb{R}^n\big)$.

Таким образом, проверка стабильности ci-гладких функционалов сводится к проверке неравенства (8). Техника вычисления ci-производных функционалов развита в [14].

5. Инфинитезимальные условия стабильности негладких функционалов

Стабильность негладких функционалов φ можно выразить в инфинитезимальной форме при помощи так называемых производных по многозначным направлениям [15, 16]:

$$d^-\big\{\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big|F\big\} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\ \inf_{y[\cdot]\in\Omega_\varepsilon}\ \liminf_{\delta\downarrow 0}\ \frac{\varphi\big(t+\delta, y[t_*[\cdot]t+\delta]\big) - \varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)}{\delta},$$

$$\Omega_\varepsilon = \Big\{y[\cdot] \in \mathrm{Lip}\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) : \dot y[\tau] \in [F]^\varepsilon \text{ п. в. } \tau \in [t, T]\Big\}.$$

Здесь F – выпуклый компакт из $\mathbb{R}^n$, определяющий многозначное направление, по которому вычисляется производная $d^-\{\varphi(t, x[t_*[\cdot]t])\big|F\}$ функционала φ, $[F]^\varepsilon$ – замкнутая ε-окрестность F в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 1. *Для непрерывного функционала* φ *условие* 1 *эквивалентно дифференциальному неравенству*

$$d^-\{\varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) - \langle s, x[t]\rangle \mid B(t, x[t_*[\cdot]t])\} + H(t, x[t_*[\cdot]t], s) \leq 0, \qquad (9)$$

которое должно выполняться для всех $t \in [t_*, T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], \mathbb{R}^n)$ *и* $s \in \mathbb{R}^n$. *Здесь* $B(t, x[t_*[\cdot]t]) = \{f \in \mathbb{R}^n : \|f\| \leq L(t, x[t_*[\cdot]t])\}$.

Доказательство теоремы приведено в [16] (см. доказательство теоремы 8.1).

6. Коинвариантно гладкие функционалы сравнения

Пусть φ – тестируемый на стабильность функционал, ψ – ci-гладкий функционал, $t \in [t_*, T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], \mathbb{R}^n)$ и $K > L(t, x[t_*[\cdot]t])$. Будем говорить, что ψ является для φ *функционалом сравнения в точке* $(t, x[t_*[\cdot]t])$, если вдоль каждой функции $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}_K(t, x[t_*[\cdot]t])$ разность $\varphi - \psi$ имеет на отрезке $[t, T]$ локальный минимум в точке t, т. е. существует $\delta \in (0, T - t]$ такое, что

$$\varphi(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) - \psi(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]) \geq \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) - \psi(t, x[t_*[\cdot]t]), \quad \tau \in [t, t + \delta].$$

Условие 2. *Для любых* $t \in [t_*, T)$, $x[t_*[\cdot]t] \in C([t_*, t], \mathbb{R}^n)$, *для любого* ci*-гладкого функционала* ψ, *являющегося для функционала* φ *функционалом сравнения в точке* $(t, x[t_*[\cdot]t])$, *имеет место неравенство*

$$\partial_t\psi(t, x[t_*[\cdot]t]) + H\Big(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\psi(t, x[t_*[\cdot]t])\Big) \leq 0. \qquad (10)$$

Теорема 2. *Условие* 2 *и дифференциальное неравенство* (9) *эквивалентны.*

Доказательство. Докажем импликацию (9)⇒(10). Возьмем произвольно $\eta > 0$, положим $s = \nabla\psi(t, x[t_*[\cdot]t])$. В силу (9) найдутся такие $\varepsilon > 0$, $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}_K(t, x[t_*[\cdot]t])$, где $K = L(t, x[t_*[\cdot]t]) + \varepsilon$, и такая последовательность $\tau_i = t + \delta_i$, $\delta_i \downarrow 0$ при $i \to \infty$, что

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\varphi(\tau_i, y[t_*[\cdot]\tau_i]) - \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) - \langle s, y[\tau_i] - x[t]\rangle}{\delta_i} + H(t, x[t_*[\cdot]t], s) \leq \eta. \quad (11)$$

Так как ψ – функционал сравнения, для достаточно больших i имеем

$$\varphi(\tau_i, y[t_*[\cdot]\tau_i]) - \varphi(t, x[t_*[\cdot]t]) \geq \psi(\tau_i, y[t_*[\cdot]\tau_i]) - \psi(t, x[t_*[\cdot]t]).$$

При этом, поскольку ψ – ci-гладкий функционал и $s = \nabla\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$, то

$$\psi\big(\tau_i, y[t_*[\cdot]\tau_i]\big) - \psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) = \partial_t\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\,\delta_i + \big\langle s, y[\tau_i] - x[t]\big\rangle + o_{y[\cdot]}(\delta_i).$$

Таким образом, из (11) выводим неравенство

$$\partial_t\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) + H\Big(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\psi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\Big) \le \eta,$$

которое в силу произвольности числа $\eta > 0$ доказывает неравенство (10).

Докажем импликацию (10)⇒(9). Обозначим

$$\alpha = d^-\big\{\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle \,\big|\, B\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big\}. \tag{12}$$

Доказываемое неравенство (9) очевидно выполняется, если $\alpha = -\infty$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha \in R$. Тогда, согласно определению величины $d^-\big\{\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle \,\big|\, B\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big\}$, для любого числа $\eta > 0$ найдется число $\varepsilon > 0$, при котором для всякой функции $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}_K\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$, где $K = L\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) + \varepsilon$, будет существовать $\delta > 0$ такое, что

$$\Big(\varphi\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big) - \big\langle s, y[\tau]\big\rangle\Big) - \Big(\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle\Big) \ge (\alpha - \eta)(\tau - t),\ \tau \in [t, t+\delta].$$

Поэтому ci-гладкий функционал $\psi\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big) = \big\langle s, y[\tau]\big\rangle + (\alpha - \eta)(\tau - t)$ является для φ функционалом сравнения в точке $\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$, причем $\partial_t\psi = \alpha - \eta$, $\nabla\psi = s$. Следовательно, по условию 2 должно выполняться неравенство

$$\alpha - \eta + H\big(t, x[t_*[\cdot]t], s\big) \le 0.$$

Так как $\eta > 0$ может быть любым, отсюда с учетом (12) заключаем, что при условии 2 неравенство (9) выполняется и в случае $\alpha \in \mathbb{R}$.

Для завершения доказательства осталось показать, что если выполнено условие 2, то $\alpha < +\infty$. От противного предположим, что $\alpha = +\infty$. Согласно определению величины $d^-\big\{\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle \,\big|\, B\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\big\}$ это означает, что, каково бы ни было число $\beta > 0$, всегда найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $y[\cdot] \in \mathrm{Lip}_K\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)$, где $K = L\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) + \varepsilon$, при некотором $\delta > 0$ будет справедливо неравенство

$$\Big(\varphi\big(\tau, y[t_*[\cdot]\tau]\big) - \big\langle s, y[\tau]\big\rangle\Big) - \Big(\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) - \big\langle s, x[t]\big\rangle\Big) \ge (\tau - t)\beta,\ \tau \in [t, t+\delta].$$

Отсюда, рассматривая функционал сравнения $\psi = \big\langle s, y[\tau]\big\rangle + (\tau - t)\beta$ и опираясь на условие 2, по аналогии с предыдущим случаем приходим к неравенству

$$\beta + H\big(t, x[t_*[\cdot]t], s\big) \le 0,$$

которое, поскольку число β может быть сколь угодно большим, противоречиво. Полученное противоречие завершает доказательство.

7. Заключительные комментарии

В силу теорем 1 и 2 для непрерывных функционалов φ условия 1 и 2 эквивалентны. Условие 1 характеризует стабильные функционалы φ как *верхние минимаксные решения* [8, 9, 16] следующего уравнения типа Гамильтона–Якоби с ci-производными:

$$\partial_t\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big) + H\Big(t, x[t_*[\cdot]t], \nabla\varphi\big(t, x[t_*[\cdot]t]\big)\Big) = 0. \tag{13}$$

Согласно подходу [10, 18, 19] условие 2 позволяет интерпретировать стабильные функционалы φ как *верхние вязкостные решения* этого уравнения. Условия 1 и 2 носят нелокальный характер. Они удобны для обоснования существования оптимальных процедур управления (см. [17]), доказательства существования и единственности обобщенного решения задачи Коши для уравнений вида (13) (см. [16]), оценки модуля непрерывности стабильных функционалов. Дифференциальное неравенство (9) выражает эти условия в инфинитезимальной форме. Им удобно пользоваться при проверке на стабильность. Для ci-гладких функционалов φ оно обращается в неравенство (8). В [15] получены формулы для вычисления производных по многозначным направлениям, которые во многом облегчают проверку стабильности в тех случаях, когда функционал φ является ci-гладким либо представляет собой огибающую семейства ci-гладких функционалов.

Литература

1. Красовский Н. Н. Дифференциальная игра сближения-уклонения. I, II // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1973. № 2. С. 3–18; № 3. С. 22–42.

2. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

3. Красовский Н. Н. Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

4. Красовский Н. Н. К задаче унификации дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226, № 6. С. 1260–1263.

5. Субботин А. И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254, № 2. С. 293–297.

6. Субботин А. И., Тарасьев А. М. Сопряженные производные функции цены дифференциальной игры // Там же. 1985. Т. 283, № 3. С. 559–564.

7. Гусейнов Х. Г., Субботин А. И., Ушаков В. Н. Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления // Проблемы управления и теории информации. 1985. Т. 14, № 3. С. 1–14.

8. Субботин А. И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона–Якоби. М.: Наука, 1991.

9. Subbotin A. I. Generalized Solutions of First–Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective. Boston: Birkhäuser, 1995.

10. Crandall M. G., Lions P.-L. Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 277, № 1. P. 1–42.

11. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959.

12. Осипов Ю. С. Дифференциальная игра наведения для систем с последействием // Прикладная математика и механика. 1971. Т. 35, вып. 1. С. 123–131.

13. Осипов Ю. С. Дифференциальные игры систем с последействием // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196, № 4. С. 779–782.

14. Ким А. В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996.

15. Лукоянов Н. Ю. О свойствах функционала цены дифференциальной игры с наследственной информацией // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65, вып. 3. С. 375–384.

16. Lukoyanov N. Yu. Functional Hamilton–Jacobi type equations in ci-derivatives for systems with distributed delays // Nonlinear Funct. Anal. Appl. 2003. Vol. 8, № 3. P. 365–397.

17. Лукоянов Н. Ю. Стратегии прицеливания в направлении инвариантных градиентов // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, вып. 4. С. 629–643.

18. Soner H. M. On the Hamilton–Jacobi–Bellman equations in banach spaces // J. Optim. Theory Appl. 1988. Vol. 57, № 3. P. 429–437.

19. Crandall M. G., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations in infinite dimensions, Part IV: Hamiltonians with unbounded linear terms // J. Funct. Anal. 1990. Vol. 90. P. 237–283.